1 Haptic Primitives

$$
\begin{aligned}
\ominus^{s}_{\vec{q}}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) &= s\vec{q} && (1) \\
\odot^{s}_{\vec{x}}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) &= \begin{cases} \vec{0}, & \text{if } |\vec{x}-\vec{x}_{\text{proxy}}| = 0 \\ s\frac{\vec{x}-\vec{x}_{\text{proxy}}}{|\vec{x}-\vec{x}_{\text{proxy}}|}, & \text{if } |\vec{x}-\vec{x}_{\text{proxy}}| \neq 0 \end{cases} && (2) \\
\oslash^{s}_{\vec{q},\vec{x}}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) &= \begin{cases} \vec{0}, & \text{if } |\vec{m}| = 0 \\ s\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}, & \text{if } |\vec{m}| \neq 0 \end{cases} && (3) \\
\vec{m} &= \vec{q}\left[\vec{q}\cdot\left(\vec{x}_{\text{proxy}}-\vec{x}\right)\right] - \left(\vec{x}_{\text{proxy}}-\vec{x}\right) && (4) \\
\text{⦷}^{s}_{\vec{q},\vec{x}}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) &= \begin{cases} 0, & \text{if } \left(\vec{x}_{\text{proxy}}-\vec{x}\right)\cdot\vec{q} \geq 0 \\ s\vec{q}, & \text{if } \left(\vec{x}_{\text{proxy}}-\vec{x}\right)\cdot\vec{q} < 0 \end{cases} && (5)
\end{aligned}
$$

$$\vec{f}(\vec{x}_{\text{proxy}}) = k\left(\vec{x}_{\text{probe}} - \vec{x}_{\text{proxy}}\right) \qquad (6)$$

$$\underset{\vec{x}_{\text{proxy}}\in\mathcal{R}^3}{\operatorname{argmin}} \left|\vec{\varepsilon}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right)\right| \qquad (7)$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\varepsilon}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) = \quad & - \quad \vec{f}(\vec{x}_{\text{proxy}}) \\
& + \quad \sum_i \ominus^{s_i}_{\vec{q}_i}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) \\
& + \quad \sum_i \odot^{s_i}_{\vec{x}_i}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) \\
& + \quad \sum_i \oslash^{s_i}_{\vec{q}_i,\vec{x}_i}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) \\
& + \quad \sum_i \text{⦷}^{s_i}_{\vec{q}_i,\vec{x}_i}\left(\vec{x}_{\text{proxy}}\right) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

2 Haptic Modes

Viscosity Mode

$$\vec{\varepsilon}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) = -\vec{f}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) + \bigodot_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{proxy}}}^{s=\tau_{\text{visc}}(V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}}))}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \tag{9}$$

Force Mode

$$\vec{\varepsilon}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) = -\vec{f}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) + \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\Rightarrow}_{\vec{q}=\frac{\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})}{|\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})|}}^{s=\tau_{\text{force}}(\left|\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})\right|)}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \tag{10}$$

Gradient Force Mode

$$\vec{\varepsilon}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) = -\vec{f}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) + \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\Rightarrow}_{\vec{q}=\frac{\vec{\nabla}V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})}{|\vec{\nabla}V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})|}}^{s=\tau_{\text{grad}}(\left|\vec{\nabla}V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})\right|)}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \tag{11}$$

Surface and Friction Mode

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})}{\left|\vec{\nabla}V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})\right|} \tag{12}$$

$$N_f = \min(\tau_{\text{surf}}(V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})),\ k\vec{n}\cdot(\vec{x}_{\text{proxy}} - \vec{x}_{\text{probe}})) \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) = -\vec{f}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \quad &+ \quad \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\parallel}_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{proxy}},\,\vec{q}=\vec{n}}^{s=\tau_{\text{surf}}(V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}}))}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \\ &+ \quad \mathop{\oslash}_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{proxy}},\,\vec{q}=\vec{n}}^{s=\tau_{\mu}(V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}}))N_f}(\vec{x}'_{\text{proxy}})\end{aligned} \tag{14}$$

Vector Follow Mode

$$\vec{\varepsilon}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) = -\vec{f}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) + \mathop{\oslash}_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{proxy}},\,\vec{q}=\frac{\vec{\nabla}V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})}{|\vec{\nabla}V(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})|}}^{s=\tau_{\text{vec}}(\left|\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})\right|)}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \tag{15}$$

Front Shape Mode

$$\vec{\varepsilon}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) = -\vec{f}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) + \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\parallel}_{\vec{q}=\frac{\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})}{|\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})|}}^{s=\tau_{\text{plane}}(\left|\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})\right|)}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \tag{16}$$

Vortex Tube Mode

$$\vec{\varphi} = \left(\vec{\nabla}\times\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}})\right)\times\vec{V}(T^{-1}\vec{x}_{\text{proxy}}) \tag{17}$$

$$\vec{\varepsilon}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) = -\vec{f}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) + \mathop{\bigcirc\!\!\!\!\!\!\parallel}_{\vec{x}=\vec{x}_{\text{proxy}},\,\vec{q}=\frac{\vec{\varphi}}{|\vec{\varphi}|}}^{s=\tau_{\text{tube}}(|\vec{\varphi}|)}(\vec{x}'_{\text{proxy}}) \tag{18}$$