

Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys I (TNIU 22)
för BI

2011-12-14 kl. 08.00—13.00

1. Enligt den geometriska betydelsen av derivatan måste den sökta tangenten ha formen $y = kx + m$ med $k = f'(x_0)$ där x_0 är den punkt i vilken vi beräknar tangenten dvs. i vårt fall kurvans inflektionspunkt. För att hitta den måste vi derivera f två gånger. Vi får $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$ och vidare $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$. Det betyder att f'' byter tecken från $-$ till $+$ i $x_0 = 2$ som är alltså vår (enda) inflektionspunkt. Den sökta tangenten har som sagt formen $y = kx + m$ där $k = f'(x_0) = -e^{-2}$. Konstanten m får vi om vi stoppar in tangentpunkten $(x_0, f(x_0)) = (2, 2e^{-2})$ i linjens ekvation. Vi får då $2e^{-2} = -2e^{-2} + m$ vilket ger $m = 4e^{-2}$. Den sökta tangenten är alltså

$$y = -e^{-2}x + 4e^{-2} = e^{-2}(4 - x).$$

Både kurvan $y = f(x)$ och den hittade tangenten kan åskådas på Figur 1.

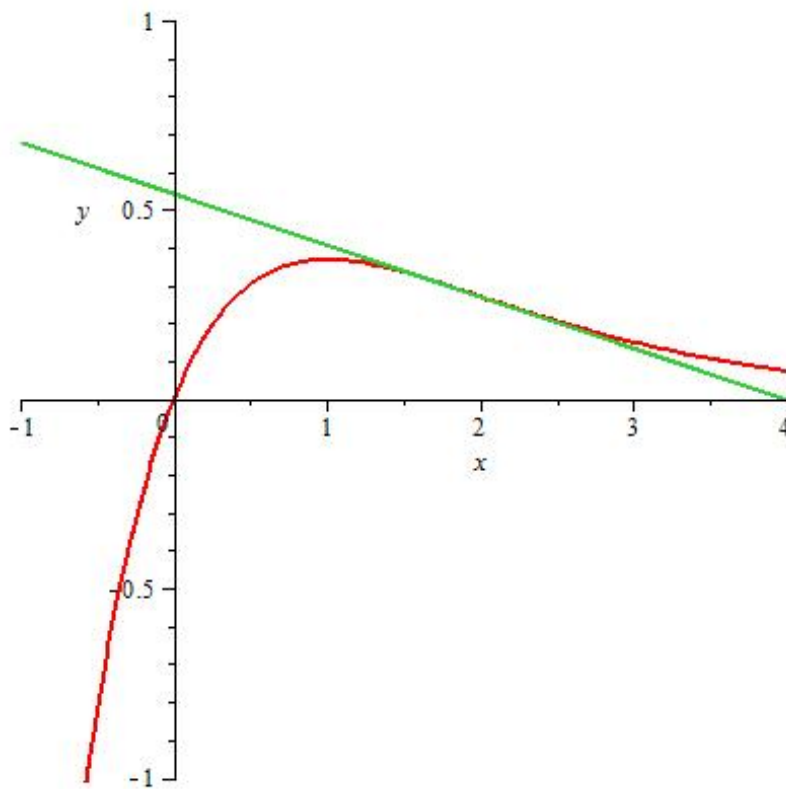


Figure 1: Kurvan $y = xe^{-x}$ och dess tangent i inflektionspunkten $x = 2$

2. a) Se Sats 4.3 sid. 184.

b) Vi börjar med i). Vi använder kedjeregeln:

$$f'(x) = \cos(1 + e^{2x}) \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \cos(1 + e^{2x}).$$

Dags för ii). Ni som kan tabell för standardprimitiver (se Sats 5.2 sid. 239, formeln (k)) inser att

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

och vi är färdiga. Ni som inte inser detta måste räkna ut derivatan med hjälp av kedjeregeln:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \right) = \\ &= \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 + 1})} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \text{ gemensam nämnare} = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

3. a) Enligt definitionen av kontinuitet (Def. 3.5 sid. 136): funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3x + x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i 0 om $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Vi har $f(0) = 0$ och

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3x + x^2 \cos \frac{1}{x} \right) = 0$$

där den andra termen går mot noll tack vare Stas 3.1 ty $\cos(1/x)$ är begränsad nära 0 (den är begränsad förstås överallt). Således, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ och funktionen är kontinuerlig i 0.

b) För att uträkna $f'(0)$ måste vi använda derivatans definition, ty om vi deriverar utanför 0 får vi

$$f'(x) = 3 + 2x \cos \frac{1}{x} + x^2 \left(-\sin \frac{1}{x} \right) \left(-\frac{1}{x^2} \right) = 3 + 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \quad (1)$$

och vi kan inte stoppa $x = 0$ i ovanstående formeln. Således

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + h^2 \cos \frac{1}{h} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(3 + h \cos \frac{1}{h} \right) = 3 \end{aligned}$$

åter igen tack vare Stas 3.1. Vi ser också från formeln (1) ovan att $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ saknas och således är f' icke-kontinuerlig i 0 och kan därför ej vara deriverbar där enligt Sats 4.1 sid. 176. Således, $f''(0)$ existerar ej. Inser man inte detta så måste man räkna $f''(0)$ m.h.a. definitionen (vi använder alltså formeln (1) ovan (med h istället av x) och det att $f'(0) = 3$:

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 + 2h \cos \frac{1}{h} + \sin \frac{1}{h} - 3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(2 \cos \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \sin \frac{1}{h} \right) \end{aligned}$$

och detta gränsvärde finns ej.

4. En möjlig metod här är att använda sig av polär form av komplexa tal. Vi har naturligtvis att $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ medan $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Således:

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8} &= \frac{(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{10}}{(\sqrt{2}e^{-i\pi/4})^8} = \frac{2^5 e^{10i\pi/4}}{2^4 e^{-8i\pi/4}} = 2e^{18i\pi/4} = \\ &= 2e^{i(4\pi+\pi/2)} = 2e^{4i\pi} e^{i\pi/2} = 2i\end{aligned}$$

En annan möjlighet är att utnyttja det att $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 2i$ medan $(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$. Således

$$\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8} = \frac{(2i)^5}{(-2i)^4} = \frac{2^5 i^5}{2^4 i^4} = 2i.$$

5. a) Se Stas. 4.8 sid. 189.

b) Enligt satsen i a) har vi

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(a)}$$

där a är sådant att $f(a) = 2$. Vi inser lätt att $a = 1$ och eftersom $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{3}x^{-2/3}$ vi får

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$$

6. Beteckna

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x}$$

För att kvalitativt rita kurvan $y = f(x)$ skall vi tillämpa vår algoritm. Vissa steg i algoritmen kan vara enklare om man gör polynomdivision och inser att

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

(bägge asymptoter är direkt synliga då, derivering är enklare) men vi kan lika gärna fortsätta med den angivna formen av f .

Steg 1: definitionsmängden. Vi ser att $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ dvs att alla x utom $x = -1$ ingår i D_f . Så, D_f har ett hål som skall senare ingå i teckentabellen.

Steg 2. nollställen. Vi ser lätt att $x = 0$ är ett enda nollställe för f . Notera att detta är en dubbelrot så att f 's graf rör vid x -axeln i origo utan att krossa den.

Steg 3. Asymptoter. Vi börjar med vertikala och det enda ställe där en vertikal asymptot kan sitta är $x = -1$ (hål i D_f). Vi ser att

$$\lim_{x \rightarrow -1_{\pm}} \frac{x^2}{1+x} = \pm\infty$$

(notera teckenuppsättning) så att linjen $x = -1$ är en vertikal asymptot för kurvan. Vi kollar även lätt att

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\frac{1}{x} + 1} = \pm\infty$$

så att horisontella asymptoter saknas. Det är därför möjligt att sneda asymptoter finns. Vi börjar med $+\infty$:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1 \\ m &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - x^2}{1+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{1+x} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = -1 \end{aligned}$$

så att $y = x - 1$ är en asymptot för f vid $+\infty$. Identisk uträkning visar att samma linje är funktionens asymptot vid $-\infty$.

Steg 4. Stationära punkter. Vi löser ekvationen $f'(x) = 0$ så vi behöver först uträkna f' . Detta görs med kvotregeln:

$$f'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

så att $f'(x) = 0$ i både $x = -2$ och $x = 0$. Dessa är alltså våra stationära punkter.

Steg 5. Singulära punkter. Det finns inga - f är ju en rationell funktion.

Steg 6. Andraderivatan och dess nollställen. En uträkning visar att

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

vilket visar att f'' har inga nollställen och att den byter tecken från $-$ till $+$ i -1 (den är dock inte definierad i -1 ty funktionen är inte definierad där; inga inflektionspunkter förekommer alltså). Funktionen är således konkav för $x < -1$ och konvex för $x > -1$.

Steg 7. Teckentabell för f' och f'' . Vi ser till att alla viktiga punkter (dvs $-2 =$ en stationär punkt, $-1 =$ hål i D_f , $0 =$ en stationär punkt) är med. Notera även att faktorn $(1+x)^2$ i f' är alltid > 0 på D_f så den behövs inte i teckentabellen. Vi får

x	$] -\infty, -2[$	-2	$] -2, -1[$	-1	$] -1, 0[$	0	$] 0, \infty[$
f''	$-$	< 0	$-$	ej def	$+$	> 0	$+$
x	$-$	-2	$-$	-1	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	1	$+$	2	$+$
f'	$+$	0	$-$	ej def	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-4	$\searrow$	ej def	$\searrow$	0	$\nearrow$
		lok. max.				lok. min.	

Steg 8. Vi ritar. Vi samlar all information från steg 1 till steg 7 och ritar grafen som på Figur 2, där vi kan även se de bågiga asymptoterna.

7. a) Denna integral löser vi direkt med tabell av standardprimitiver (se Sats 5.2 sid. 239).

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \ln \left| x + \sqrt{1+x^2} \right| + \arcsin x + C.$$

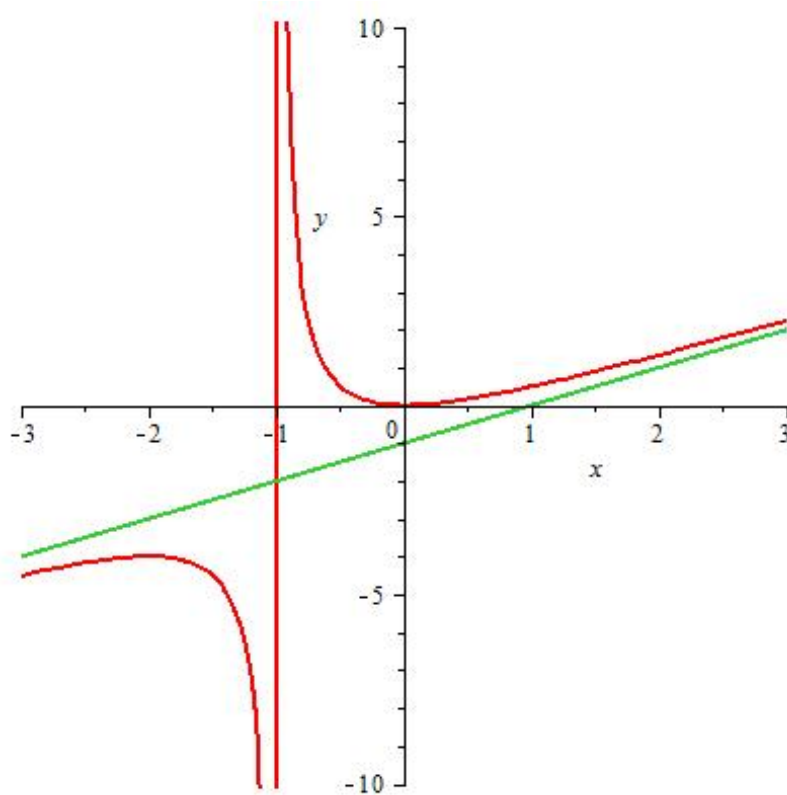


Figure 2: Kurvan $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ med dess bägge asymptoter

b) Integralen hittar vi med hjälp av partiell integration och vi börjar att med att förlänga funktionen med 1:

$$\begin{aligned} \int \arctan x \, dx &= \int 1 \cdot \arctan x \, dx \stackrel{\text{P.I.}}{=} \left[\begin{array}{l} f' = 1, g = \arctan x \\ f = x, g' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right] = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \\ &= x \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

där i uträkningen av $\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$ använde vi det att täljaren = nämnarens derivata (se formeln (c) i Sats 5.3 sid. 239).