

Krzysztof Marciniak, ITN
Linköpings universitet
tfn 011-36 33 20
krzma@itn.liu.se

Lösningar till kontrollskrivningen KTR1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI1
2012-02-02 kl. 08.00—10.00

1. a) Vi utför variabelbyte $y = \sin x$ och får

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx &= \left[\begin{array}{l} y = \sin x \Rightarrow \cos x dx = dy \\ x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x = \pi/2 \Rightarrow y = 1 \end{array} \right] = \\ &= \int_0^1 \frac{dy}{2 + y} = [\ln(2 + y)]_{y=0}^{y=1} = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

b) Vi inser att $x^2 - 4 \equiv (x - 2)(x + 2) = 0$ för $x = -2$ och för $x = 2$. Således, mellan -2 och 2 är uttrycket under beloppstecknet negativt och vi måste därför splittra vår integral i två: en från 0 till 2 (där uttrycket är negativt) och en från 2 till 4 där uttrycket är positivt (se Figur 1 som visar både $x^2 - 4$ /rött färg/ och dess absolutbelopp /grön färg/). Utnyttjar vi detta samt definition av absolutbeloppet får vi

$$\begin{aligned} \int_0^4 |x^2 - 4| dx &= \int_0^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^4 |x^2 - 4| dx = - \int_0^2 (x^2 - 4) dx + \int_2^4 (x^2 - 4) dx = \\ &= - \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x \right]_2^4 = - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \left(\frac{64}{3} - 16 - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right) = 16. \end{aligned}$$

2. Den sökta arean ges av integralen

$$\int_2^3 \frac{3x + 7}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$$

där eftersom integranden är en rationell funktion skall vi använda vår 4-steps metod. Steg 1 (polynomdivision) behövs då ej medan Steg 2 (faktorisering av nämnaren) är redan utfört. Vi går alltså direkt till partialbråksuppdelning (se tabell sid. 252) och finner lätt att

$$\frac{3x + 7}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{5}{x - 1} - \frac{5x + 2}{x^2 + 1}$$

Konstanten A hittas då lättast med hjälp av handpåläggning:

$$A = \left. \frac{3x + 7}{x^2 + 1} \right|_{x=1} = \frac{10}{2} = 5$$

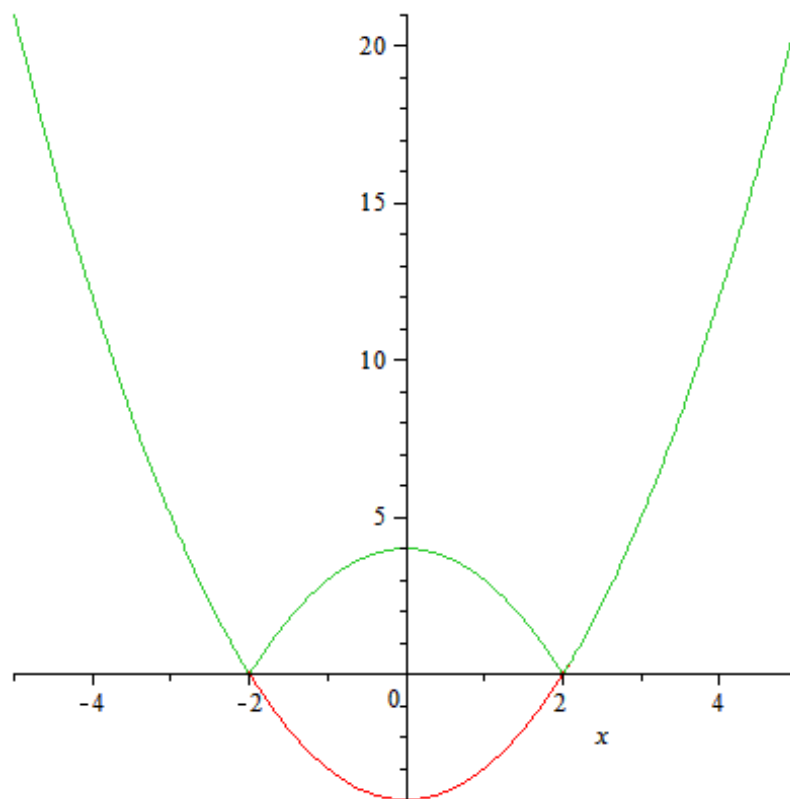


Figure 1: Kurvan $x^2 - 4$ och dess absolutbelopp

medan konstanterna B och C kan fås t.ex. genom att slå ihop HL till ett bråk och jämföra täljare på VL och HL . Vi får således

$$\begin{aligned}
 \int_2^3 \frac{3x+7}{(x-1)(x^2+1)} dx &= 5 \int_2^3 \frac{dx}{x-1} - \int_2^3 \frac{5x+2}{x^2+1} dx = \\
 &= 5 [\ln|x-1|]_2^3 - \frac{5}{2} [\ln(x^2+1)]_2^3 - 2 [\arctan x]_2^3 = \\
 &= 5 \ln 2 - 5 \ln 1 - \frac{5}{2} (\ln 10 - \ln 5) - 2 \arctan 3 + 2 \arctan 2 = \\
 &= \frac{5}{2} \ln 2 - 2 \arctan 3 + 2 \arctan 2.
 \end{aligned}$$

Notera hur man uträknar en primitiv till $\frac{5x+2}{x^2+1}$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{5x+2}{x^2+1} dx &= \int \frac{5x}{x^2+1} dx + \int \frac{2}{x^2+1} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx = \\
 &= \frac{5}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x + C.
 \end{aligned}$$

där vi alltså i den första integralen utnyttjar formeln

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

3. Integralen

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

är generaliserad i punkten a (som är > 0 enligt antagandet i uppgiften) så att

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &= \lim_{c \rightarrow a-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \lim_{c \rightarrow a-} \left[\arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right]_0^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow a-} \left(\arcsin \left(\frac{c}{a} \right) - \arcsin 0 \right) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. a) Se boken, Sats 6.7 sid. 285.

b) Vi börjar med i) Om vi betecknar med $F(t)$ en primitiv till integranden $f(t) = te^t$ då får vi enligt insättningsformeln att $S(x) = F(x^2) - F(1)$ varför

$$S'(x) = F'(x^2) \cdot 2x = 2x f(x^2) = 2x \cdot x^2 e^{x^2} = 2x^3 e^{x^2}.$$

Vi får naturligtvis samma sak om vi använder "superformeln" dvs. sambandet

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Dags för ii). Vi räknar först ut $S(x)$ med hjälp av partiell integration:

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_1^{x^2} te^t dt = \left[\begin{array}{l} f = t, f' = 1 \\ g' = e^t, g = e^t \end{array} \right] = [te^t]_1^{x^2} - \int_1^{x^2} e^t dt = \\ &= x^2 e^{x^2} - e - [e^t]_1^{x^2} = x^2 e^{x^2} - e - e^{x^2} + e = x^2 e^{x^2} - e^{x^2}. \end{aligned}$$

Vi kan nu lätt derivera $S(x)$:

$$S'(x) = 2x e^{x^2} + x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x - 2x e^{x^2} = 2x^3 e^{x^2}$$

vilket stämmer överens med resultatet i i).