

Lösningar till tentamen TEN1 i Envariabelanalys II (TNIU 23)
för BI

2012-05-21 kl. 08.00-13.00

1. a) Se boken, sid. 387.

b) Differentialekvationen

$$(1 + x^2) y' = 2xy^2$$

är separabel och vi kan separera variabler i den genom att dela den ledvis med $(1+x^2)y^2$ (notera att vi då förlorar lösningen $y(x) = 0$ men denna lösning uppfyller inte begynnelsevillkoret $y(0) = 1$). Vi får

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{2x}{1+x^2}$$

eller

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{2x dx}{1+x^2}$$

och ledvis integration

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{2x dx}{1+x^2}$$

ger den allmänna lösningen i implicit form

$$-\frac{1}{y} = \ln(1+x^2) + C$$

som kan lätt lösas för y :

$$y = \frac{-1}{\ln(1+x^2) + C}$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 1$ ger $C = -1$ och vi får att den sökta lösningen är

$$y = \frac{1}{1 - \ln(1+x^2)}$$

2. Differentialekvationen

$$y'' + y = \sin x$$

löses med hjälp av teori i kap. 9.3. Vi börjar med y_h dvs. den allmänna lösningen av den homogena delen av ekvationen. Denna får vi genom att lösa motsvarande karakteristiska ekvation som är $r^2 + 1 = 0$ och vars lösningar är $y = \pm i$. Det betyder att

$$y_h = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

och vi ser att ekvationens högerled $\in y_h$ och således den enklaste ansatsen $y_p = A \sin x + B \cos x$ kommer ej att fungera. Det betyder att vi måste leta för y_p på formen $y_p = A(x) \sin x + B(x) \cos x$. Vi får då

$$y'_p = A'(x) \sin x + A(x) \cos x + B'(x) \cos x - B(x) \sin x$$

och vidare

$$y''_p = A''(x) \sin x + 2A'(x) \cos x - A(x) \sin x + B''(x) \cos x - 2B'(x) \sin x - B(x) \cos x$$

Insättning i differentialekvationen ger

$$(A'' - 2B') \sin x + (2A' + B'') \cos x = \sin x$$

så att $A'' - 2B' = 1$ och $B'' + 2A' = 0$. Vi letar nu efter den enklaste möjliga lösningen av detta system och då räcker det att ta $A(x) = 0$ och $B(x) = -\frac{1}{2}x$. Det betyder att $y_p = -\frac{1}{2}x \cos x$ så att ekvationens allmänna lösning är

$$y = y_h + y_p = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2}x \cos x$$

3. Den sökta volymen ges av

$$V = \pi \int_4^5 y^2(x) dx = \pi \int_4^5 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$$

och ges alltså av en integral av en rationell funktion, som hittas med hjälp av vår 4-stegsmetod. Steg 1 (polynomdivision) behövs ej. Steg 2 (faktorisering av nämnaren) ger

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

och således (steg 3) PBU för integranden blir

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 3}$$

där konstanterna A och B kan hittas t.ex. genom "handpåläggning". Resultatet är

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{-1/2}{x - 1} + \frac{1/2}{x - 3}$$

och således, enligt insättningsformeln (Steg 4)

$$V = \pi \int_4^5 \left(\frac{-1/2}{x - 1} + \frac{1/2}{x - 3} \right) dx = \frac{\pi}{2} [\ln |x - 3| - \ln |x - 1|]_4^5 = \frac{\pi}{2} (\ln 2 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 3) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

4. Den sökta arean ges av

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + x} dx = \left[\begin{array}{l} t = x + 1, dt = dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1, x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right] = \\ &= 2\pi \int_1^2 (t - 1) \sqrt{t} dt = 2\pi \int_1^2 (t^{3/2} - t^{1/2}) dt = 2\pi \left[\frac{t^{5/2}}{5/2} - \frac{t^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = 4\pi \left(\frac{2^{5/2}}{5} - \frac{2^{3/2}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{8}{15}\pi (1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

5. a) Se boken, sid. 354.

b) Vi vet att $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7)$ medan $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + O(x^4)$. Således

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3(\cos x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^3(1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{120}x^5 + O(x^7)}{x^3(-\frac{1}{2}x^2 + O(x^4))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{120}x^2 + O(x^4)}{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{120} + O(x^2)}{-\frac{1}{2} + O(x^2)} = -\frac{1}{60} \end{aligned}$$

6. a) Den sökta täthetsfunktionen är naturligtvis F 's derivata så att

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

b) Enligt definition av fördelningsfunktion

$$P(X < \sqrt{3}) = F(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

och

$$P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1) = \frac{1}{\pi}(\arctan(1) - \arctan(-1)) = \frac{2}{\pi} \arctan 1 = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

7. a) Se boken, sid. 285.

b) Enligt analysens huvudsats

$$S'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x^3 + 1}}$$

så att $S'(x) = 0$ (x kallas stationär för S om $S'(x) = 0$) om och endast om $\cos x = 0$ vilket på det angivna intervallet inträffar i $x = \frac{1}{2}\pi$ samt i $x = \frac{3}{2}\pi$.